Tutorato di Statistica 1 del 15/11/2010
Docente: Prof.ssa Enza Orlandi
Tutore: Dott.ssa Barbara De Cicco

Esercizio 1.

Sia $X_1, ..., X_n$ un campione casuale dalla distribuzione Poissoniana di parametro λ.

1. Determinare la funzione generatrice dei momenti e la distribuzione di $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$.
2. Si calcoli lo stimatore per λ con il metodo dei momenti.
3. Si calcoli lo stimatore di massima verosimiglianza per λ.
4. Trovare una statistica sufficiente.
5. Determinare un UMVUE di λ.
6. Dimostrare che le statistiche

   $T_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} 1_{(0)}(X_i)$

   $T_2 = (\frac{n-1}{n})^{\sum_{i=1}^{n}(X_i)}$

   sono stimatori non distorti di $\tau(\lambda) = e^{-\lambda}$. Determinare un UMVUE di $\tau(\lambda)$.
7. Calcolare il limite inferiore di Cramer-Rao per lo stimatore di $e^{-\lambda}$.

Esercizio 2.

Sia $X_1, ..., X_n$ un campione casuale da $f(x, \theta) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta} 1_{(0,\infty)}(x)$

1. Dimostrare che le statistiche $\hat{\theta_1}, ..., \hat{\theta_4}$ sono stimatori non distorti di θ e calcolarne gli errori quadratici medi relativi $MSE(\hat{\theta}_i)$.
   $\hat{\theta_1} = X_1$; $\hat{\theta_2} = \frac{X_1+X_2}{2}$; $\hat{\theta_3} = \frac{X_1+2X_2}{3}$; $\hat{\theta_4} = \bar{X}$
2. Dimostrare che $\hat{\theta_4}$ è una statistica sufficiente e trovare l' UMVUE per θ.
3. Trovare un UMVUE per $Var(X_i)$.

Esercizio 3.

Sia $X_1, ..., X_n$ un campione casuale da:
$f(x, \theta) = \theta x^{\theta-1} 1_{(0,1)}(x)$, $\theta > 0$.

1. Trovate lo stimatore di massima verosimiglianza di $\mu = \frac{\theta}{1+\theta}$.
2. Trovate una statistica sufficiente.
3. C' è una funzione di θ per la quale esiste uno stimatore non distorto la cui varianza coincide con il limite inferiore di Cramer-Rao?
4. Trovate l'UMVUE di θ e di $\frac{1}{\theta}$.